

利用局部线性嵌入的模态识别

白俊卿^{1,2}, 闫桂荣^{1,2}, 王成^{1,2}

(1. 西安交通大学航天航空学院, 710049, 西安;

2. 西安交通大学机械结构强度与振动国家重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 提出了一种新的利用局部线性嵌入的模态识别方法。该方法以流形学习为理论基础,从提取结构的几何或固有特征出发,以系统结构的响应数据为分析对象,可识别出结构的模态参数。该方法的基本思想是,将结构的响应看作一个高维数据集,将系统的模态看作高维数据集的本质结构与固有特征,然后通过求解数据的低维嵌入进行模态参数识别。圆柱壳仿真结果表明:提出的利用局部线性嵌入的模态识别方法能够有效地进行模态参数识别;随着阻尼系数的增加,对于贡献量较大的模态,利用局部线性嵌入的识别效果优于基于主成分分析的识别效果。

关键词: 模态识别;局部线性嵌入;流形学习

中图分类号: O235 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2013)01-0085-05

Modal Identification Method Following Locally Linear Embedding

BAI Junqing^{1,2}, YAN Guirong^{1,2}, WANG Cheng^{1,2}

(1. School of Aerospace, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. State Key Laboratory for Mechanical Structural Strength and Vibration, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: A novel modal identification for dynamic system following locally linear embedding is proposed. Regarding manifold learning as the theory foundation, and starting from the structural geometry or inherent characteristics extraction, the modal parameters of the system structure can be identified only by analyzing the response data. The principal idea is to consider the response data as a high-dimensional data set and the modals of the structure as the essential structure and the inherent characteristics of the high-dimensional data set. Then the modal parameter identification problem is transformed into a low dimensional embedding problem of the data set. The numerical simulation results of a cylindrical shell show that this locally linear embedding based method is effective in modal identification, and with the increase of the damping coefficient, it gets superior to the principal component analysis based method in identification of the modals with larger contribution.

Keywords: modal identification; locally linear embedding; manifold learning

模态参数(包括固有频率、模态阻尼、模态振型)是结构系统的本质特征,通过分析这些模态参数,可以更深入地理解结构的动力学行为。传统的实验模态分析方法是在实验室条件下对结构施加人为激励,通过测量激励力和结构响应并进行双通道快速傅里叶变换(FFT)分析,得到任意两点之间的频率

特性函数,再用模态分析理论对频率特性函数进行曲线拟合,以此估计出模态参数。但是,由于环境、设备、技术等限制,对于一些复杂或大型结构,通过实验仅可以测得系统在一定工况下的时域振动响应信号,但无法直接通过人为激励和实验模态分析的方法来求取系统的模态参数。因此,直接利用响

应信号进行模态识别具有重要的意义。

时域估计法是近十几年发展起来的一种模态参数估计方法,这类方法往往只需根据结构的动力响应信号就可估计出模态参数。20世纪80年代末,人们开始对工作变形进行研究^[1];21世纪初,文献[2-4]提出基于合适的正交分解(在有限维情况下即是主成分分析)方法进行模态识别;2007年,文献[5-6]提出基于盲源分离的模态识别方法。对于离散系统或一些简单的一维连续系统(如梁的振动),这些方法都取得了很好的结果。但是,对于复杂三维连续系统(如圆柱壳的振动),尚未看到相应的报道。

流形学习是近年来机器学习领域的一个研究热点。该方法采用非线性方式提取数据集中内在的几何结构^[7],主要算法有局部线性嵌入算法^[8-9]、等距映射算法、拉普拉斯特征映射算法、扩散映射算法等。本文将流形学习引入动力学系统的模态识别研究中,从几何与特征提取的角度出发,将系统的时域响应数据看成是一个高维数据集,将系统的模态看作该高维数据集的本质结构与固有特征,提出一种基于局部线性嵌入的模态识别方法,用于对复杂三维连续系统进行模态识别,并同主成分分析方法进行了实验比较。

1 基于局部线性嵌入算法的动力学系统模态识别

1.1 局部线性嵌入算法

局部线性嵌入(LLE)算法是一种局部流形学习算法,该方法的主要思想是通过保持数据的局部邻域结构来获取高维数据的低维嵌入。LLE算法认为流形在很小的局部邻域上可以近似看成欧氏的(即局部线性的),那么在一个很小的局部邻域上,一个点就可以用它周围的点在最小二乘意义下得到最优的线性表达,即每个样本点可以通过它的邻域点来重构。LLE算法把得到的线性拟合系数(重构权)作为对该流形局部几何性质的刻画,认为一个好的低维表示应该具有同样的局部几何,因此,LLE算法要求在低维空间中保持每个邻域中的权值不变,最后通过极小化损失函数得到低维嵌入^[7-9]。LLE算法具体描述如下。

设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ 是采样于某个光滑流形上的一个包含 N 个 D 维实值向量的数据集,LLE算法首先计算 X 中任意两点之间的欧氏距离构成距离矩阵,基于该矩阵得到每个样本点 x_i 的邻域集 J_i 。设重构权矩阵 $W = [w_{ij}]$, w_{ij} 表示样本点 x_i 的

邻域集中的样本点 x_j 对重构样本点 x_i 所做的贡献,即 x_i 同邻域点 $x_j \in J_i$ 之间的重构权。利用该重构权矩阵,可以通过损失函数度量公式得到全局重构误差

$$\epsilon(W) = \sum_{i=1}^N \left\| x_i - \sum_{j \in J_i} w_{ij} x_j \right\|^2 \quad (1)$$

当对样本点 x_i 和它的邻域点作平移、旋转和缩放时,为了保持重构权 w_{ij} 不变,LLE算法限制 w_{ij} 满足下面2个约束条件:① $w_{ij} = 0, \forall j \notin J_i$,即 x_i 仅由它的邻域集重构;②重构权矩阵中每一行的和等于1,即对所有的 $i, \sum_{j=1}^N w_{ij} = 1$ 。在满足这2个约束的情况下极小化全局重构误差,得到重构权 w_{ij} 。根据拉格朗日乘子法,可得 $w_i = \frac{z_i}{1^T z_i}$,其中 z_i 由 $G_i^T G_i z_i = 1$ 计算得到, $G_i = [\dots, x_i - x_j, \dots], j \in J_i$,具体可参见文献[7-9]。

假设数据集 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ 位于一个光滑的 $d(d \ll D)$ 维流形上,由于重构权 w_{ij} 反映了数据的内部几何性质,LLE算法要求 X 的 d 维嵌入 $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ 具有相同的内部几何性质,即具有相同的重构权 w_{ij} 。基于这个思想,LLE算法通过极小化损失函数

$$\Phi(Y) = \sum_{i=1}^N \left\| y_i - \sum_{j \in J_i} w_{ij} y_j \right\|^2 \quad (2)$$

得到 y_i 。为了得到唯一解,LLE算法要求满足下面2个约束条件: $\sum_{i=1}^N y_i = \mathbf{0}$, 其中 $\mathbf{0}$ 是一个列向量;

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i y_i^T = \mathbf{I}. \text{ 从而有}$$

$$\Phi(Y) = \sum_{i=1}^N \left\| y_i - \sum_{j \in J_i} w_{ij} y_j \right\|^2 = \sum_{ij} m_{ij} (y_i^T y_j)$$

式中

$$m_{ij} = \delta_{ij} - w_{ij} - w_{ji} + \sum_k w_{ki} w_{kj}$$

$$\mathbf{M} = [m_{ij}] = (\mathbf{I} - \mathbf{W})^T (\mathbf{I} - \mathbf{W})$$

可以很容易得到 $\mathbf{M}$ 的最小的 $d+1$ 个特征值对应的特征向量 $u_1, \dots, u_d, u_{d+1}$, 去掉第一个特征向量后,剩下的 d 个特征向量组成的矩阵 $\mathbf{Y} = [u_2, \dots, u_d, u_{d+1}]^T$ 就是计算的嵌入结果^[7-9]。

1.2 基于局部线性嵌入算法的模态识别

模态参数反映了动力学系统的本质特征,我们可以通过LLE算法来寻找这一本质特征。对于一般的动力学系统,当激励不是谐波激励时,系统的时域响应可以用模态坐标系下的模态振型和模态坐标

的线性组合来表示,当响应能够通过贡献量最大的几阶模态逼近时,模态坐标就可以看作系统的时域响应数据的一个低维嵌入。基于该思想,我们提出利用 LLE 算法进行模态识别的新方法。

对于复杂三维连续系统,时域响应可以表示为

$$X(t) = UQ(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(s, \beta) q_n(t) \quad (3a)$$

$$Y(t) = VQ(t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(s, \beta) q_n(t) \quad (3b)$$

$$Z(t) = WQ(t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(s, \beta) q_n(t) \quad (3c)$$

式中: u_n 、 v_n 、 w_n 分别是 X 、 Y 、 Z 3 个方向上的第 n 阶模态振型向量,即 $[u_n, v_n, w_n]$ 表示系统的第 n ($n=1, 2, \dots, \infty$) 阶模态振型; $q_n(t)$ 是第 n 阶模态坐标,包含了第 n 阶固有频率的信息,根据振动理论可以推导出在 3 个方向上 $q_n(t)$ 是相同的。在有限元分析和实验分析中,三维连续系统被离散化为 D 个测试点,时间离散化为采样点数 T , $t=1, 2, \dots, T$, 则系统振动的时域响应数据在理论上可以近似表示为

$$X_{D \times T} = U'_{D \times N} Q_{N \times T} \quad (4a)$$

$$Y_{D \times T} = V'_{D \times N} Q_{N \times T} \quad (4b)$$

$$Z_{D \times T} = W'_{D \times N} Q_{N \times T} \quad (4c)$$

式中: N 是有限元计算时的模态截断数。模态坐标 $Q_{N \times T}$ 在 X 、 Y 、 Z 3 个方向上是相同的,因此只需求出 1 个方向上的模态坐标即可。

基于 LLE 算法的模态识别的具体步骤如下。

(1) 从系统 3 个方向上的时域数据集 $X_{D \times T}$ 、 $Y_{D \times T}$ 、 $Z_{D \times T}$ 中,选取 1 个方向上的数据集作为样本学习集,建议选取包含信息比较多的方向上的数据集,记为 S ,则样本集 S 的维数为 D ,样本点数为 T ;

(2) 先将样本集 S 归一化,再利用 LLE 算法计算 S 的 d 维嵌入

$$Q_{d \times T} = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t), \dots, q_d(t)]^T, \\ t = 1, 2, \dots, T$$

(3) 用 $Q_{d \times T}$ 代替式(4)中的 $Q_{N \times T}$,用 $U'_{D \times d}$ 代替 $U'_{D \times N}$,用 $V'_{D \times d}$ 代替 $V'_{D \times N}$,用 $W'_{D \times d}$ 代替 $W'_{D \times N}$,则式(4)变为

$$X_{D \times T} = U'_{D \times d} Q_{d \times T} \quad (5a)$$

$$Y_{D \times T} = V'_{D \times d} Q_{d \times T} \quad (5b)$$

$$Z_{D \times T} = W'_{D \times d} Q_{d \times T} \quad (5c)$$

将步骤(2)得到的 $Q_{d \times T}$ 代入式(5),可以求得

$$U'_{D \times d} = [u'_1, u'_2, \dots, u'_n, \dots, u'_d]$$

$$V'_{D \times d} = [v'_1, v'_2, \dots, v'_n, \dots, v'_d]$$

$$W'_{D \times d} = [w'_1, w'_2, \dots, w'_n, \dots, w'_d]$$

其第 n 列 $[u'_n, v'_n, w'_n]$ 对应 3 个方向上的第 n 阶振型,利用单自由度系统参数识别技术,可从模态坐标 $q_n(t)$ 中识别出第 n 阶固有频率。

需要注意的是,由于各阶模态在输出信号中的贡献不同,因此由 $U'_{D \times d}$ 、 $V'_{D \times d}$ 、 $W'_{D \times d}$ 得到的振型与有限元计算得到的模态振型顺序有可能是不一致的,例如 $[u'_1, v'_1, w'_1]$ 可能是动力学系统的第 2 阶模态振型。

2 仿真实验验证

2.1 概述

为了检验基于 LLE 算法的模态识别方法的有效性,以一个两端简支边界条件的圆柱壳作为研究对象,施加均布混响高斯白噪声激励。圆柱壳参数设置为:厚度 0.005 m,长度 0.37 m,半径 0.182 5 m,弹性模量 205 GPa,材料的泊松比 0.3,材料的密度 7 850 kg/m³;模态阻尼比 η 分别为 0.03、0.05 和 0.1。然后,沿圆柱壳轴向均布 38 圈,每圈均分布 115 个观测点,则观测点总数 $D=4\ 370$,采样频率设置为 5 120 Hz,采样时间设置为 1 s。利用 LMS Virtual. lab 有限元方法进行计算,从每个观测点获取到 3 种不同阻尼比下 X 、 Y 、 Z 3 个方向的结构位移响应数据,形成 3 个方向的响应数据集。

对于 3 种阻尼比下的数据集,利用 1.2 节给出的基于 LLE 算法的模态参数识别方法计算其模态振型和固有频率,并且为了评价识别的效果,与主成分分析方法获得的结果进行对比。以 LMS Virtual. lab 有限元法求得的无阻尼模态振型和固有频率作为圆柱壳的实际模态振型和固有频率的基准,除比较 2 种方法的模态振型和固有频率之外,还采用模态置信系数来评价振型识别结果。模态置信系数(modal assurance criterion,用 C_{ma} 表示)是反映模态振型识别有效性的一个重要指标,其计算公式为

$$C_{ma,i} [\phi_i, \phi_i] = \frac{(\phi_i^T \phi_i)^2}{(\phi_i^T \phi_i)(\phi_i^T \phi_i)}$$

式中: ϕ_i 表示识别的第 i 阶振型; ϕ_i 表示有限元法计算的第 i 阶实际振型; $(\phi_i^T \phi_i)$ 表示两向量的内积。 $0 \leq C_{ma,i} \leq 1$, 其值越大(即越接近 1),说明识别的第 i 阶模态振型的准确性越高。

2.2 仿真实验结果与分析

表 1~表 9 分别给出了当圆柱壳的阻尼比 η 为 0.03、0.05、0.1 时,利用 PCA 和 LLE 算法识别的模态振型和固有频率与有限元法计算的模态振型和固有频率的比较。

从表 1 和表 2 可以看出,当阻尼比为 0.03 时,对于贡献量较大的第 1、2、3 阶模态振型,LLE 算法的识别效果比 PCA 法的好,而第 4、5、7 阶模态振型

的识别效果相差不大。表 3 表明,这 2 种算法识别的固有频率的误差均小于-0.275%。

表 1 $\eta=0.03$ 时 3 种算法获得的模态振型比较

算法	模态振型					
	第1阶	第2阶	第3阶	第4阶	第5阶	第7阶
有限元						
PCA						
LLE						

表 2 $\eta=0.03$ 时 PCA 和 LLE 算法识别的模态振型的模态置信系数比较

算法	C_{ma}					
	第 1 阶	第 2 阶	第 3 阶	第 4 阶	第 5 阶	第 7 阶
PCA	0.888 4	0.849 3	0.692 8	0.533 1	0.703 9	0.918 0
LLE	0.911 4	0.960 4	0.815 0	0.521 3	0.689 3	0.894 3

表 3 $\eta=0.03$ 时 3 种算法获得的固有频率比较

阶数	有限元法	PCA 法		LLE 算法	
	频率/Hz	频率/Hz	相对误差/%	频率/Hz	相对误差/%
第 1 阶	1 054.9	1 052	-0.275	1 052	-0.275
第 2 阶	1 145.7	1 143	-0.236	1 146	0.027
第 3 阶	1 239.6	1 237	-0.210	1 237	-0.210
第 4 阶	1 441.9	1 443	0.076	1 443	0.076
第 5 阶	1 740.0	1 738	-0.115	1 738	-0.115
第 7 阶	1 871.7	1 873	0.069	1 873	0.069

从表 4 和表 5 可以看出,当阻尼比为 0.05 时,LLE 算法能很好地识别出各阶模态振型,而对于贡献量较大的第 1、2、3 阶振型,PCA 法的识别效果明

显下降。表 6 表明,这 2 种算法识别的固有频率的误差均小于-0.847%。

表 4 $\eta=0.05$ 时 3 种算法获得的模态振型比较

算法	模态振型					
	第1阶	第2阶	第3阶	第4阶	第5阶	第7阶
有限元						
PCA						
LLE						

表 5 $\eta=0.05$ 时 PCA 和 LLE 算法识别的模式振型的模式置信系数比较

算法	C_{ma}					
	第 1 阶	第 2 阶	第 3 阶	第 4 阶	第 5 阶	第 7 阶
PCA	0.661 0	0.509 9	0.431 3	0.527 4	0.687 5	0.917 6
LLE	0.926 9	0.793 3	0.802 0	0.516 5	0.690 8	0.917 5

表 6 $\eta=0.05$ 时 3 种算法获得的固有频率比较

阶数	有限元法	PCA 法		LLE 算法	
	频率/Hz	频率/Hz	相对误差/%	频率/Hz	相对误差/%
第 1 阶	1 054.9	1 052	-0.275	1 059	0.388
第 2 阶	1 145.7	1 136	-0.847	1 147	0.113
第 3 阶	1 239.6	1 232	-0.613	1 237	-0.210
第 4 阶	1 441.9	1 439	-0.201	1 439	-0.201
第 5 阶	1 740.0	1 747	0.402	1 738	-0.115
第 7 阶	1 871.7	1 868	-0.198	1 868	-0.198

从表 7 和表 8 可以看到,当阻尼比增加为 0.1 时,LLE 算法依然能很好地识别出各阶模式振型,而 PCA 法识别的第 1、2 阶模式振型严重变形。表 9 表明,这 2 种算法识别的固有频率的误差均小于 1.685%。

表 7 $\eta=0.1$ 时 3 种算法识别的模式振型比较

算法	模式振型				
	第1阶	第2阶	第4阶	第5阶	第7阶
有限元					
PCA					
LLE					

表 8 $\eta=0.1$ 时 PCA 和 LLE 算法识别的模式振型的模式置信系数比较

算法	C_{ma}				
	第 1 阶	第 2 阶	第 4 阶	第 5 阶	第 7 阶
PCA	0.451 9	0.671 6	0.507 0	0.615 9	0.911 3
LLE	0.899 2	0.920 7	0.447 4	0.618 2	0.838 5

表 9 $\eta=0.1$ 时 3 种算法获得的固有频率比较

阶数	有限元法	PCA 法		LLE 算法	
	频率/Hz	频率/Hz	相对误差/%	频率/Hz	相对误差/%
第 1 阶	1 054.9	1 050	-0.464	1 060	0.483
第 2 阶	1 145.7	1 163	1.510	1 165	1.685
第 4 阶	1 441.9	1 434	-0.548	1 434	-0.548
第 5 阶	1 740.0	1 747	0.402	1 747	0.402
第 7 阶	1 871.7	1 868	-0.198	1 868	-0.198

(下转第 100 页)